Základy spojité optimalizace

Lineární prg

$$\max_M c^T x$$
$$M = \{x; Ax \le b, x \ge 0\}$$
$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

Degenerace

Duální simplexová metoda

Celočíselné prg

$$\max_M c^T x$$
$$M = \{x; Ax \le b, x \ge 0\}$$
$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$$
$$C \subseteq \{1..n\}, \forall c \in C: x_c \in \mathbb{Z}$$

Pokud C = {1, …, n}, pak úloha ryzího celočíselného prg, jinak smíšeného.

Branch and bound (kombinatorická, Land & Doig)

řeším spojitou úlohu, pokud nalezené řešení nesplňuje podm. celočíselnosti, rozdělím M na dvě části podle první neceločíselné složky řešení – nalezené řešení označ $\tilde{x}$:

$$\exists j = \min\{j; x_j \in \mathbb{Z} \wedge \tilde{x}_j \notin \mathbb{Z}\}$$
$$M_1 = M \cap \{x; x_j \le \lfloor \tilde{x}_j \rfloor\} (\text{dolní celá část})$$
$$M_2 = M \cap \{x; x_j \ge \lceil \tilde{x}_j \rceil\} (\text{horní celá část})$$

a řeším dvě spojité úlohy. Postupně dostanu řešení. Některé větve výpočtu rovnou odřezávám, když vidím, že mi nemohou dát lepší řešení než jaké již mám.

Metoda je konečná, ale neexistuje odhad složitosti – čas ani paměť: stále roste počet tabulek, jejich velikost také roste.

Vhodné pro smíšenou úlohu, kde |C| je malá.

1. Gomoryho algoritmus (metoda sečných nadrovin)

čisté celočís prg

neceločíselné řešení spojité úlohy – vezmu první neceločíselnou složku – s její pomocí definuji sečnou nadrovinu dimenze n-1 („řez tvoří to co je neceločíselné“)

realizace řezu = přidání jednoho řádku tabulky – vznikne nepřípustný tvar, ale řešíme lexikografickou DSM (l-metoda), poté lze přidaný řádek zase vynechat (není zřejmé, dokázal Gomory) => stálá velikost tabulky

alg je konečný, je-li M omezená a cílová funkce nabývá pouze celočíselných hodnot

L-metoda – upravená DSM, zaručuje jednoznačné určení řezu. Je-li více optim, vybírám to, které je lexikograficky největší – tj. $\tilde{x}$ je l-optimální, je-li optimální a pro každé optimum $\bar{x}$ platí:

$(min\{i;\tilde{x}_i \neq 0\} < min\{j;\bar{x}_j \neq 0\}) \vee (min\{i;\tilde{x}_i \neq 0\} = min\{j;\bar{x}_j \neq 0\} =: k \wedge \tilde{x}_k > \bar{x}_k)$

Tedy je vhodné, aby významnější složky proměnné x byly na nižších indexech (přeuspořádání).

Parametrické prg

$$\begin{gathered} max_M\, c^T x \\ M = \{x; Ax \leq b, x \geq 0\} \\ x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \end{gathered}$$

Nelineární prg

$$\begin{gathered} max_M\, f(x) \\ M = \{x; g_j(x) \leq 0\} \\ x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{R}^m, g_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{gathered}$$

Konvexní prg

f, g_j jsou konvexní funkce

Kuhn-Tuckerovy podmínky

Vícekriteriální opt

$$\begin{gathered} max_M\, \boldsymbol{f}(x) \\ \boldsymbol{f}(x) = \{f_1(x), f_2(x) \ldots f_s(x)\} \\ M = \{x; g_j(x) \leq 0\} \\ x \in \mathbb{R}^n, f_j, g_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ \forall j \end{gathered}$$

Ideální řešení ($\exists x_0 \in M : \forall i \forall x \in M\ f_i(x) \leq f_i(x_0)$)

Dominantní řešení (Varianta ai dominuje variantu aj , jestliže pro její ohodnocení platí

(yi1, yi2 ,…, yik) >= (yj1, yj2,…, yjk)

a existuje alespoň jedno kritérium fl , že yil > yjl .)

Množina eficientních řešení ($\tilde{x} \in M, \forall x \in M\ pevné: f_i(x) > f_i(\tilde{x}_i) \Rightarrow \exists j, f_j(x) < f_j(\tilde{x}_j)$)

Kompromisní řešení (dodatečná kriteria)

Eficientní řešení

Parametrický skalární ekvivalent: $$\begin{gathered} max\, \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \\ M^{opt}(\lambda) = \{\tilde{x} \in M; max_M\, \lambda^T f(x) = \lambda^T f(\tilde{x})\} \end{gathered}$$

Platí, že $\cup_{\lambda > 0} M^{opt}(\lambda) \subset E$, platí = nebo skoro =

Algoritmy dialogu

I. metoda

zvolíme $\lambda^{0,} \lambda^1 \in E$

jednoparametrická úloha s parametrem t: $max(\lambda^0 + t(\lambda^1 - \lambda^0))^T f(x)$, najdu obor stability

uživatel má na výběr: skončit (spokojenost), pokračovat daným směrem, změnit λ^1 , změnit $\lambda^0 a \lambda^1$, vrátit se k dřívějšímu řešení

II. metoda

zlepšit vybranou f_i aspoň o $mý_i$

Kompromisní řešení

Váhová fce
Dostávám od uživatele info o preferencích

Dynamické prg

X – přípustné stavy
U – možná rozhodnutí
Úlohou lineárního diskrétního dynamického programování je

$$max\ f_N(x_{1,}\dots,x_N,u_{1,}\dots,u_N)$$

na množině přípustných řešení (pro daný počáteční stav x_1)

$$P(x_1)=\{(u_{1,}\dots,u_n);\forall i\in\{1,\dots,n\}:x_{i+1}=T_i(x_i,u_i),x_i\in X\ ,x_{i+1}\in X\ ,u_i\in U\}$$

při daných transformačních zobrazeních

$$T_i(x_i,u_i)\in X\ ,x_i\in X\ ,u_i\in U$$

kde účelová funkce je definovaná pro každé N a má markovského vlastnost (typicky separabilní –

$$f(x_{1,}\dots,x_n,u_{1,}\dots,u_n)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_i,u_i),g_i:\mathbb{R}^{n+m}\rightarrow\mathbb{R}\,\forall i$$)

Teorie her

Konečná maticová hra dvou hráčů s nulovým součtem – výplatní matice A, strategie prvního hráče $i\in\{1,\dots,n\}$, druhého hráče $j\in\{1,\dots,m\}$, $f=(A)_{i,j}$, první hráč chce max f, druhý min f.

Čistá strategie (i, j) => maticová hra {1, 2, i, j, A}

Smíšené rozšíření maticové hry: $\{1,2,[X],[Y],x^T A y\}$, kde

$$[X]=\{x_{1,}\dots,x_n\},\forall i:x_i\in\mathbb{R}_{+0},\sum x_i=1$$ (pravděpodobnost strategie i), obdobně [Y]

Cena hry (průměrná výhra) je $\frac{N\cdot\sum_{\forall i,j}(x_i\cdot y_j)a_{ij}}{N}=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}A\boldsymbol{y}$

Hledáme optimální strategii $\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}}$, aby platilo:

$$\forall x,y:\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}A\tilde{\boldsymbol{y}}\le\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}A\tilde{\boldsymbol{y}}\le\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}A\boldsymbol{y}$$

Ta vždy existuje.